

Jedna zanimljiva trigonometrijska nejednakost za trokut i njezina primjena

ŠEFKET ARSLANAGIĆ¹

U ovom ćemo radu dati tri dokaza jedne zanimljive trigonometrijske nejednakosti za trokut, koja glasi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}, \quad (1)$$

gdje su a, b, c dužine stranica toga trokuta, a α njegov unutrašnji kut, kao i nekoliko njezinih primjena.

Dokaz 1. Prvo ćemo izvesti formulu

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad (2)$$

gdje je s poluopseg trokuta $\triangle ABC$.

Imamo poznatu jednakost

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

iz koje, koristeći se kosinusovim teoremom za trokut $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{4(s-b)(s-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \end{aligned}$$

a ovo je (2).

Zbog jednakosti (2) imamo da je

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$$

¹Šefket Arslanagić, Sarajevo

ekvivalentno

$$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \leq \frac{a}{b+c}.$$

Kvadriranjem gornje jednakosti dobivamo

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc} \leq \left(\frac{a}{b+c}\right)^2.$$

Daljnijim sređivanjem dobivamo sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc} &\leq \frac{a^2}{(b+c)^2} \\ 4a^2bc &\geq (b+c)^2 (a+c-b)(a+b-c) \\ 4a^2bc &\geq (b^2 + 2bc + c^2) [a^2 - (b-c)^2] \\ 4a^2bc &\geq a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 - b^2(b-c)^2 - 2bc(b-c)^2 - c^2(b-c)^2. \end{aligned}$$

Prebacivanjem svih članova na lijevu stranu i faktoriziranjem dobivamo:

$$\begin{aligned} b^4 + c^4 + 2a^2bc - a^2b^2 - 2b^2c^2 - a^2c^2 &\geq 0 \\ (b^2 - c^2)^2 - a^2(b^2 - 2bc + c^2) &\geq 0 \\ (b-c)^2 [(b+c)^2 - a^2] &\geq 0 \\ (b-c)^2 (b+c+a)(b+c-a) &\geq 0. \end{aligned}$$

Za posljednju nejednakost znamo da je točna jer je $(b-c)^2 \geq 0$ i $b+c > a$. Time je i nejednakost (1) dokazana.

Očigledno vrijede analogne nejednakosti:

$$\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

i

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{a+b}. \quad (4)$$

Dokaz 2. Koristeći se sinusovim teoremom za trokut dobivamo da je

$$\frac{a}{b+c} \geq \sin \frac{\alpha}{2}$$

ekvivalentno sljedećim nejednakostima:

$$\frac{2R \sin \alpha}{2R \sin \beta + 2R \sin \gamma} \geq \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} \geq \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Iz adicijskih formula imamo

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq \sin \frac{\alpha}{2},$$

odnosno

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq 1,$$

što je dalje ekvivalentno

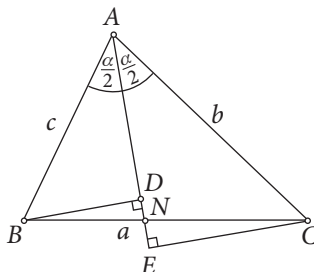
$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq 1$$

$$\frac{1}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq 1$$

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1.$$

Posljednja je nejednakost očigledno točna, što znači da je nejednakost (1) dokazana.

Vrijedi jednakost u (1), (3) i (4) ako i samo ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut.



Dokaz 3. Neka je u trokutu $\triangle ABC$ točka N sjecište simetrale kuta α sa stranicom BC , a točke D i E redom nožišta normala spuštenih iz točaka B i C na AN (Slika 1).

Iz pravokutnih trokuta $\triangle ABD$ i $\triangle AEC$ imamo da je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|},$$

a odavde je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BD|+|CE|}{|AB|+|AC|} \leq \frac{|BN|+|CN|}{|AB|+|AC|}, \text{ tj.}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{|BC|}{|AB|+|AC|}$$

ili

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}, \text{ q.e.d.}$$

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1), (3) i (4).

Nakon množenja nejednakosti (1), (3) i (4) dobivamo nejednakost

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}. \quad (5)$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc},$$

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac},$$

a odavde, nakon njihova množenja,

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}, \text{ tj.}$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

te

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \leq \frac{1}{8}. \quad (6)$$

Sada iz (5) i (6) slijedi nejednakost

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (7)$$

Vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. za jednakostranični trokut.

Dat ćemo još dvije posljedice nejednakosti (7).

Posljedica 1. Vrijedi nejednakost

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Dokaz: Koristeći se poznatom jednakosti

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

i nejednakosti (7), dobivamo da je

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8}, \text{ tj.}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

Posljedica 2. Vrijedi nejednakost

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}. \quad (9)$$

Dokaz: Koristeći se poznatom jednakosti

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

i nejednakosti (8), tj. $-\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \geq -\frac{3}{4}$, dobivamo:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4}, \text{ tj.}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (9) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

Napomena: U [2] imamo nejednakost 2.9, s. 20 koja glasi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
3. S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.